Robbins，Monro：A Stochastic Approximation Method

赵磊

Study Group

2021.9.27

动机

假设你是胡萝卜种植商，你种植的胡萝卜的数量决定了胡萝卜在商店里的价格，也决定了你收获胡萝卜时能赚多少钱

- 种的太多 → 市场供大于求，利润低

- 种的太少 → 不能尽可能利用市场需求，利润低

种植胡萝卜和利润之间的联系是复杂的，我们将它建模为一个**随机优化**问题，并尝试处理这个模型中的随机成分(天气、经济气候、运输费用等)

目标：找到一个极小化期望损失的胡萝卜种植计划 θ^*.

- 损失可以建模成一个胡萝卜种植计划 θ 的随机函数

$$Loss \sim q(X, \theta) \text{ 可观测}$$

  - X 是外部因素构成的随机向量，独立于 θ

$$X \sim F(x) \text{ 不可观测}$$

- 种植胡萝卜问题

$$\min_{\theta \in \Theta} Q(\theta) = \mathbb{E}[q(X, \theta)]$$

- q: $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- $\Theta \subseteq \mathbb{R}^n$，决策空间

$$\min_{\theta \in \Theta} Q(\theta) = \mathbb{E}[q(X, \theta)]$$

假设：

1．$Q(\theta)$ 强凸，强凸系数为 $K > 0$．即，

$$\theta_1 - \theta_2, \nabla_\theta Q(\theta_1) - \nabla_\theta Q(\theta_2)| \geq K\theta_1 - \theta_2|_2^2$$

2．我们有一个随机变量 $Y \sim P(y, \theta)$，满足，

$$\mathbb{E}[Y|\theta] = \nabla_\theta Q(\theta)$$

3．Y 的二阶矩关于 θ 一致有界 ，

$$\int y|_2^2 dP(y, \theta) \leq C^2 \quad \forall\, \theta \in \Theta$$

假设 2 告诉我们必须有一个梯度的无偏估计.

2. 我们有一个随机变量 $Y \sim P(y,\theta)$, 满足,

$$\mathbb{E}[Y|\theta] = \nabla_\theta Q(\theta)$$

对于大多数的损失函数, 比如, 平方损失

$$q(X,\theta) = \frac{1}{2}[A\theta - X|_2^2]$$

令 $Y = \nabla_\theta q(X,\theta) = A^T(A\theta - X)$, 那么

$$\mathbb{E}[Y|\theta] = \mathbb{E}[\nabla_\theta q(X,\theta)|\theta] = \mathbb{E}[A^T(A\theta - X)|\theta] = \nabla_\theta Q(\theta)$$

红色的等号成立需要一些正则性条件, 这允许我们将求导和积分交换次序. (IPA)

- 我们想要找到 $Q(\theta)$ 的最小值，并且不通过计算定义它的期望

$$Q(\theta) = \mathbb{E}[q(X,\theta)]$$

- 为什么我们需要这么做？因为，该期望通常没有闭解（解析解）
- 相反，我们通过构造一个序列 $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 来求解，而这个序列通过依赖于之前定义的随机变量 $Y\sim P(y,\theta_n)$
- 我们希望能够从 $Y\sim P(y,\theta_n)$ 中采样，并构造序列来极小化 $Q(\theta)$
- 因此，问题转化为证明 θ_n 的相合性，即

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N,\ s.t.\ \forall\, n \geq N \Rightarrow \mathbb{P}(\theta_n - \theta^*|_2 > \epsilon) < \epsilon$$

即，$\theta_n \xrightarrow{P} \theta^*$

定理

令 $a_n > 0$，且满足

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$

对于某个初始值 θ_0，定义序列

$$\theta_{n+1} = \theta_n - a_n Y_n$$

其中，$Y_n \sim P(y, \theta_n)$ 满足**假设 2** 和 **假设 3**，而且 $\nabla_\theta Q(\theta^*) = 0$（求根），

$Q(\theta)$ 满足**假设 1**. 那么，有 $\theta_n - \theta^*|_2 \xrightarrow{P} 0$

事实 L^2 收敛可以推出依概率收敛，即，

$$\mathbb{E}[\theta_n - \theta^*|_2^2] \to 0 \Rightarrow \theta_n - \theta^*|_2 \xrightarrow{P} 0$$

Proof

根据**事实**，我们只需要证明 L^2 收敛，定义 $b_n = \mathbb{E}[\theta_n - \theta^*|_2^2]$，即证

$$b_n \to 0 .$$

那么，

$$b_{n+1} = \mathbb{E}[\theta_{n+1} - \theta^*|_2^2]$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\theta_{n+1} - \theta^*|_2^2|\theta_n]]$$

$$= \mathbb{E}[\int (\theta_n - \theta^*) - a_n y|_2^2 dP(y, \theta_n)]$$

$$= b_n + a_n^2 \mathbb{E}[\int y|_2^2 dP(y, \theta_n)] - 2a_n \mathbb{E}\underbrace{[\theta_n - \theta^*, \nabla_\theta Q(\theta_n)|]}_{}$$

根据**假设 2** $\mathbb{E}[Y|\theta] = \nabla_\theta Q(\theta)$

Proof

那么，

$$b_{n+1} = \mathbb{E}[\theta_{n+1} - \theta^* |_2^2]$$

$$= b_n + a_n^2 \mathbb{E}[\int y|_2^2 dP(y, \theta_n)] - 2 a_n \mathbb{E}[\theta_n - \theta^*, \nabla_\theta Q(\theta_n) |]$$

$\Rightarrow$

$$b_{n+1} = b_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathbb{E}[\int y|_2^2 dP(y, \theta_i)] - \sum_{i=1}^{n} 2 a_i \mathbb{E}[\theta_i - \theta^*, \nabla_\theta Q(\theta_i) |] \quad (1)$$

Proof

那么，

$$b_{n+1} = b_0 + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_i^2 \mathbb{E}[\int y|_2^2 dP(y,\theta_i)]}_{\mathbb{E}[\int y|_2^2 dP(y,\theta_n)] < C^2 \text{ 根据假设 3}} - \sum_{i=1}^{n} 2a_i \mathbb{E}[\theta_i - \theta^*, \nabla_\theta Q(\theta_i)|] \quad (1)$$

$$\leq b_0 + C^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i=1}^{n} 2a_i \underbrace{\mathbb{E}[\theta_i - \theta^*, \nabla_\theta Q(\theta_i)|]}_{\text{因为 } \theta^* \in \arg\min_\theta Q(\theta)\text{，} \nabla_\theta Q(\theta^*) = 0}$$

$$\mathbb{E}[\theta_i - \theta^*, \nabla_\theta Q(\theta_i)|] = \mathbb{E}[\theta_i - \theta^*, \nabla_\theta Q(\theta_i) - \nabla_\theta Q(\theta^*)|]$$

$$\geq Kb_i \text{ 根据假设 1}$$

Proof

那么，

$$b_{n+1} = b_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathbb{E}[\int y|_2^2 dP(y, \theta_i)] - \sum_{i=1}^{n} 2 a_i \mathbb{E}[\theta_i - \theta^*, \nabla_\theta Q(\theta_i)\|] \quad (1)$$

$$0 < b_{n+1} \le b_0 + C^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i=1}^{n} 2 a_i \mathbb{E}[\theta_i - \theta^*, \nabla_\theta Q(\theta_i)\|] \quad (2)$$

$$\mathbb{E}[\theta_i - \theta^*, \nabla_\theta Q(\theta_i)\|] = \mathbb{E}[\theta_i - \theta^*, \nabla_\theta Q(\theta_i) - \nabla_\theta Q(\theta^*)\|] \ge K b_i \quad (3)$$

(2)+(3)

$$\Rightarrow 0 \le \sum_{i=1}^{n} K a_i b_i \le \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{E}[\theta_i - \theta^*, \nabla_\theta Q(\theta_i)\|] \le \frac{1}{2}(b_0 + C^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2) \quad (4)$$

Proof

那么，

$$0 \le \sum_{i=1}^{n} K a_i b_i \le \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{E}[\theta_i - \theta^*, \nabla_\theta Q(\theta_i)|] \le \frac{1}{2}(b_0 + C^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2) \quad (4)$$

令 $n \to \infty$，并考虑到 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$，

$$0 \le \sum_{i=1}^{\infty} K a_i b_i \le \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbb{E}[\theta_i - \theta^*, \nabla_\theta Q(\theta_i)|] \le \frac{1}{2}(b_0 + C^2 \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2) < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n < \infty \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbb{E}[\theta_i - \theta^*, \nabla_\theta Q(\theta_i)|] < \infty \quad (6)$$

Proof

那么，

$$b_{n+1} = b_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathbb{E}[\int y|_2^2 dP(y,\theta_i)] - \sum_{i=1}^{n} 2a_i \mathbb{E}[\theta_i - \theta^*, \nabla_\theta Q(\theta_i)|] \quad (1)$$

令 $n \to \infty$，并考虑到

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \mathbb{E}[\int y|_2^2 dP(y,\theta_i)] \leq C^2 \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$$

和（1）式、（6）式，有

$$\lim_{n\to\infty} b_{n+1}$$

$$= b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \mathbb{E}[\int y|_2^2 dP(y,\theta_i)] - \sum_{i=1}^{\infty} 2a_i \mathbb{E}[\theta_i - \theta^*, \nabla_\theta Q(\theta_i)|] < \infty$$

Proof

那么，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n < \infty \text{ 和 } \lim_{n\to\infty} b_n < \infty$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ ， $a_n > 0$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n < \infty$，且 b_n 的极限存在，故

$$b_n \to 0$$

证毕

补充证明

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ ， $a_n > 0$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n < \infty$，且 b_n 的极限存在，不妨设为

b

$\forall \epsilon > 0$ ，$\exists N > 0$，当 $n \geq N$ 时，$b_n > b - \epsilon$，那么，

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n (b - \epsilon) < \sum_{n=N}^{\infty} a_n b_n < \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n < \infty.$$

即，

$$b \sum_{n=N}^{\infty} a_n - \epsilon \sum_{n=N}^{\infty} a_n < \infty$$

由于 ϵ 的任意性以及 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ ，

$$b \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Rightarrow b = 0$$

拓展

- 其实，收敛是以概率一的（Blum）
- 收敛速度如下：
  - $\mathbb{E}[Q(\theta_n) - Q(\theta^*)] \in O(1/n)$ 当 Q 强凸时
  - $\mathbb{E}[Q(\theta_n) - Q(\theta^*)] \in O(1/\sqrt{n})$ 当 Q 凸但并非强凸时
- $\frac{\theta_n - \theta^*}{\sqrt{n}}$ 满足渐进正态性（Sacks）
- 在只给定凸的条件下，$O(1/\sqrt{n})$ 已经是下确界（Nemirovski et al）

END